Title	概週期函數ノ Fourier 級数ノ operation ニ関スル Bochner-Jessen ノ定理
Author(s)	高橋, 進一
Citation	全国紙上数学談話会. 58 p.21-p.26
Issue Date	1935-09-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74127
rights	
Note	

205. 概週期函數ノFourier級數ノOperation ニ關スルBochner-Jessenノ定理

高橋 進一 (阪大)

J. Favard ハ其ノ thèse, Sur les fonctions harmoniques presque-périodiques (Paris, 1927) 中デ次ノ有名ナ定理ヲ述ベテ居マス。

今

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t} \quad (-\infty < t < \infty)$$

ヲ real variable t ノ概週期函數トスル。$f(t)$ ノ積分ガ有界デ且ツ $f(t)$ ハ order α $(0 < \alpha \leqq 1)$ ノ Lipschitz condition ヲ滿足スルナラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} i A_n \operatorname{sgn} \Lambda_n e^{i\Lambda_n t},$$

$$\operatorname{sgn} \Lambda_n = \begin{cases} +1 & \text{for } \Lambda_n > 0 \\ 0 & \text{for } \Lambda_n = 0 \\ -1 & \text{for } \Lambda_n < 0 \end{cases}$$

ハ $f(t)$ ノ Conjugate function $g(t)$ ノ Fourier 級數デアル。

此ノ定理ノモトノ証明ハ調和概週期函數ノ理論ヲ使フノデ可成リ面倒デスガ Favard ハ昨年 "Matematisk Tidsskrift, B" デ

Sur la fonction conjuguée d'une fonction presque-périodique

ノ標題下ニ上掲ノ定理ノ簡單ナ證明ヲ公ニシマシタ。

其ノ證明法ハ概週期函數ノ親玉 Bohr ヲシテ私ニクレタ手紙中デ "the beautiful method" ト云ハシメタ程極メテ elegant ナモノデス。私ハ此ノ Favard ノ方法ヲ使ッテ次ノ定理ヲ證明シマシタ。

(S. Takahashi, On a Property of the Fourier Series of an Almost Periodic Function, 帝國學士院記事, 1935)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x} \quad (-\infty < x < \infty)$$

ヲ real variable x ノ概週期函數トシ且ツ $f(x)$ ノ積分が有界ナラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sgn} \Lambda_n \cdot e^{-\sigma|\Lambda_n|} e^{i\Lambda_n x} \quad (\sigma \text{ ハ任意ノ正數})$$

モ亦概週期函數ノ Fourier 級數トナル。

此ノ定理ハ analytic almost periodic function ノ理論中デ重要ナ定理ノ一ツデアル Bohr ノ "Randwertsatz" ノ一拡張ト見做シ得ルモノデス。所が先程出タ "Matematisk Tidsskrift B" デ Copenhagen 大學數学教室ノ R. Petersen が

Om den for melle Differentiation of

Fourierudviklingen for en naesten-periodisk Funktion

ノ標題下ニ私ノ定理ヲ横張シタ次ノ様ナ美シイ定理ヲ証明シテ居マス。（原論文ハでんまーく語）

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲ *real variable* t ノ概週期函数トスルトキ

$$\sum_{\Lambda_n<0} \Lambda_n A_n e^{\Lambda_n s}$$

並ビニ $\qquad S = \sigma + it$

$$\sum_{\Lambda_n>0} \Lambda_n A_n e^{\Lambda_n s}$$

ハ夫々 *half-plane* $[0, +\infty)$ 並ビニ $(-\infty, 0]$ ニ於テ解析概週期函数ノ *Dirichlet series* トナル。

此定理ガ何故興味アルカト云ヘバ一般ニ

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

カラ *formal* ニ微分シテ得タ *series* $\sum_{n=1}^{\infty} i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n t}$ ハ概週期函数ノ *Fourier* 級数トハナリマセン。ソウナル場合ハ $f(t)$ ノ *derivative* ガ存在シテ然モ其ガ又ハリ概週期函数トナル場合ニ限リマス。其時初メテ

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n t}$$

依ッテ何等特別ノ假定ナクシテ得ラレタPetersenノ定理ハ概週期函数ノFourier級数ノformal differentiationニ関スル面白イ定理デアリ、此ノ定理ハ同時ニBohrノ解析概週期函数ノLaurent Seperationニ関スル定理ノ擴張トモナツテ居マス。

次ニ

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t} \qquad (\Lambda_n\ \text{ハ凡テ} \neq 0\ \text{トスル})$$

ヲformalニ積分シテ得タseries

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \qquad (C\ \text{ハ常数})$$

モ亦一般ニ概週期函数ノFourier級数トナリマセン。ソウナル場合ハ

$$F(t) = \int^{t} f(x)\,dx$$

ガ有界ナ場合，從ツテ $F(t)$ ガヤハリ概週期函数トナル場合ニ限リマス。此処ニ於テ概週期函数ノFourier級数ノformal integrationニ関スル定理ガアルベキ筈デス。

其ニ對シテ私ハ次ノ定理ヲ得マシタ。

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲreal variable t ノ概週期函数トスルトキ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sigma + i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \qquad (\sigma\ \text{ハ任意ノ正数})$$

ハ概週期函數ノFourier級數デアル。（此ノ定理ノ証明ハ On the Formal Integration of the Fourier Series of an Almost Periodic Function トイフ題目デ10月ニ發行サレル Matematisk Tidsskrift B ニ出ル筈デス）

以上ノ Petersen ノ定理モ私ノ定理モ其ノ証明法ハ本質的ニ見テ Favard ノ方法ト異ナツテ居マセン。然モ此ノ Favard ノ方法ヲ利用シテ Copenhagen 大學數學教室ノ B. Jessen ハ次ノヤウナ概週期函數ノ Fourier 級數ノ operation ニ關スル一般的ナ定理ヲ得マシタ。（此事ニ關スル Jessen ノ論文ガ Remarks on the theorems of R. Petersen and S. Takahashi トイフ題目デヤハリ10月ニ發行サレル Matematisk Tidsskrift B ニ出ル筈デス）

今 $K(x)$ ヲ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(x)|\,dx$$

ガ收斂スル様ナ real variable ノ函數トシ其 Fourier transform

$$H(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x)e^{-i\lambda x}dx$$

ヲ考ヘル。然ルトキ

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲ real variable t ノ概週期函數トスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} H(\Lambda_n) A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ハ

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(-x+t)K(x)\,dx$$

ナル概週期函數ノ Fourier 級數デアル。

此ノ定理ハ Jessen モ注意シテ居ルヤウニ Bochner ノ論文

Über die Struktur von Fourierreihen fastperiodischer Funktionen

(Münchener Berichte, 1928)

中ニ極ク implicitely ニ姿ヲ現ハシテ居マス。先掲ノ Petersen ノ定理モ私ノ定理モ $K(x)$ ヲ特殊ナ函數ニ取レバ出テ來マス。

此ノ Bochner-Jessen ノ定理ハ一般的ナモノナノデ其レカラ種々ノ興味アル定理ガ誘導サレル可能性ガ充分アルヤウニ思ヘマス。又 Bochner-Jessen ノ定理自身ヲ更ニ擴張スルコトモ試ミラレルベキ價値ガアルト信ジマス。